1. Sea $V = \{ f : R \to R : f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 \}$, $f_1 = 1 + t + 2t^2$; $f_2 = 1 + \alpha t + 2t^2$; $f_3 = 1 + 2t + \alpha t^2$ se pide:

a. Determinar todos los valores de α para los que está bien definida $T \in L(V, R^3)$ tal que $T(f_1) = [1\ 1\ 1]^T$, $T(f_2) = [1\ {-1}\ 1]^T$, $T(f_3) = [2\ 0\ 2]^T$, y para tales valores hallar sendas bases de Nu (T) e Im (T).

b. Para la TL de (a) con $\alpha = 3$, decidir para qué valores de λ existirán bases B de V y B' de R^3 tal que $[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

a. De algún modo la pregunta es ¿qué dimensión tiene V? y sabemos la respuesta: el cardinal de una base; ahora bien, según la definición es $V = \text{gen}\{ f_1, f_2, f_3 \}$, y planteando $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 = 0_V$ resulta que

a1. Para $\alpha = 1$ es $f_1 = f_2$, siendo $\{f_1, f_3\}$ una base de V, y ciertamente T se halla definida sobre $\{f_1, f_3\}$, pero el punto es que T no es función, ya que $T(f_1) \neq T(f_2)$ con $f_1 = f_2$. De aquí resulta que debe ser $\alpha \neq 1$.

a2. Para $\alpha = 2$ es $f_2 = f_3$, siendo $\{f_1, f_3\}$ una base de V, y ciertamente T se halla definida sobre $\{f_1, f_3\}$, pero el punto es que T no es función, ya que $T(f_2) \neq T(f_3)$ con $f_2 = f_3$. De aquí resulta que debe ser $\alpha \neq 2$.

a3. Para $\alpha \in R - \{1, 2\}$ es $\{ f_1, f_2, f_3 \}$ li, de modo que dim V = 3 y ciertamente T se halla definida sobre una base de V : $\{ f_1, f_2, f_3 \}$, resultando bien definida.

Entonces el campo de valores de α que satiface lo pedido es $R - \{1, 2\}$[1].

El resto es inmediato, $\text{Im}(T) = \text{gen}\{(1\ 1\ 1)^T, (1\ {-1}\ 1)^T, (2\ 0\ 2)^T\} = \text{gen}\{(1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 0)^T\}$ y de allí $\{(1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 0)^T\}$ es una base de la imagen, mientras que siendo la dimensión del núcleo 1 basta señalar al conjunto $\{ f_1 + f_2 - f_3\}$[2] como una base suya.

b. El valor particular de α es intrascendente[3], es necesario y suficiente[4] que la matriz tenga rango 2, y como *para cualquier* λ las dos primeras columas son li, la condición se cumple sii es nula la tercera columna, es decir $\lambda = 1$.

[1] Por algún motivo que no alcanzo a comprender, buena proporción de los alumnos omiten los pasos a1. y a2. en su análisis. (¡nótese que bastaría que el ejercicio asignara la misma imagen a los tres para que estuviese bien definida para todo α!)
[2] Observar a simple vista que $T(f_1 + f_2 - f_3) = (0\ 0\ 0)^T$.
[3] Basta que se halle en el campo de valores determinado en el punto a.
[4] ¿porqué es necesario, porqué es suficiente?

2. a. Hallar A ∈ R 3 x 3 tal que (1 –1 0) A = $(0\ 0\ 0)^T$ y A admita una descomposición QR normalizada A = QR con

$$R=\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$ **; ¿es única?.**

b. Para la matriz A de (a), hallar la matriz de proyección sobre S =$[\text{col}(A)]^{\perp}$.

a. **El dato es que col (A) =$\{(1\ -1\ 0)^T\}^{\perp}$ = gen $\{(1\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 1)^T\}$, y como col(A) = col(Q), bien podría ser**[5]

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ y entonces } A = QR = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ satisface lo pedido.}$$

Claro que no es única, y ahí va otra, con la misma idea:

$$Q=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \text{ y entonces } A = QR = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 4 & 2+\sqrt{3} & 4+2\sqrt{3} \\ 4 & 2+\sqrt{3} & 4+2\sqrt{3} \\ 4 & 2-\sqrt{3} & 4-4\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ satisface lo pedido.}$$

b. **Puesto que S = gen$\{(1\ -1\ 0)^T\}$, la cuenta es inmediata, P = H H^T siendo H =** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **y así**

queda[6] $$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[5] He encontrado un frecuente argumento que me deja perplejo: quieren hacerme creer que la norma de la primera columna de Q_0 debe ser $\sqrt{2}$ y la de la segunda debe ser $\sqrt{3}$ lo que creen deducir del aspecto de R; algo así como si al pronunciar 12 yo debiese aceptar que estuve pensando en 3 x 4 (y no en 2 x6 o 0. 5 x 24, o nada de ello en absoluto. Ruego reflexionar!!!

[6] Aunque no lo pregunta, ésta sí es única.

3. **a. Demostrar que $< p , q > = p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1) + p(-1)\, q(-1)$ es un producto interno en P_2 pero no en P_3.**
b. Hallar los valores de α , β para que $p(t) = \alpha\, t + \beta\, (t^2 +1)$ se halle lo más cerca posible de $q(t) = t^2$.

a. Es claro que $<\ >: P_2 \to R$ y que para cualesquiera escalares k en R y polinomios p, q, r en P_2 se tiene[7]

a1. $< kp, q > = (kp)(0)\, q(0) + (kp)(1)\, q(1) + (kp)(-1)\, q(-1) = k\, [\, p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1) + p(-1)\, q(-1)] = k < p, q >$

a2. $<p,q+r > = p(0)\, (q+r)(0) + p(1)\, (q+r)(1) + p(-1)\, (q+r)(-1) =$
$= p(0)\, (q(0)+r(0)) + p(1)\, (q(1)+r(1)) + p(-1)\, (q(-1)+r(-1)) =$
$= \{p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1) + p(-1)\, q(-1)\} + \{p(0)\, r(0) + p(1)\, r(1) + p(-1)\, r(-1)\} =$
$= <p, q > + < p, r >$

a3. $<p, q > = p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1) + p(-1)\, q(-1) = q(0)\, p(0) + q(1)\, p(1) + q(-1)\, p(-1) =$
$= <q, p >$

a4. $<p,p> = [p(0)]^2 + [p(1)]^2 + [p(-1)]^2 \geq 0$ claramente y además si $<p,p> = 0$ resulta de lo anterior que p es un polinomio (¡de P_2!) con tres raíces y entonces es el polinomio nulo.

De lo anterior, < , > es un pi en P_2.

En P_3 se puede tomar el polinomio no nulo $p(t) = t^3 - t$ para el que $<p,p> = 0$, de modo que no es un pi en P_3.[8]

b. El polinomio p se halla, por definición en $S = \text{gen}\, \{t, t^2+1\}$, de modo que estamos buscando aquél de S más próximo a q, esto es la proyección de q sobre S; como en este caso la base de S $B = \{t, t^2+1\}$ es ortogonal[9] es directamente entonces

$\alpha = <t^2, t> / <t, t> = 0$

$\beta = <t^2, t^2 +1> / <t^2 +1, t^2 +1> = 5 / 9$

[7] ¡Justificar todas las igualdades!!
[8] En general, encontré que o bien ignoraban los axiomas de un pi , o proponían versiones libres desafinadas; escasamente hallé quien supiera que la negación de un universal (todos somos inteligentes) sólo se logra exhibiendo un particular (éste es un cretino), de modo que jamás me enteré porqué no era un pi en P_2.
[9] $<t,t^2+1> = 0 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 2 = 0$, sin esta cuenta verificada nada vale en adelante.

4. Sea $T \in L(R^3, P_2)$, E la base canónica de R^3, $B = \{1, t+1, t^2+t\}$ y

$$[T]_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ \lambda^2 & 4\lambda+3 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide: a. Hallar los valores de λ para que T sea inversible, justificar porqué para $\lambda = -1$ es biyectiva, explicar cómo se obtiene $[T^{-1}]_{E'E}$ a partir de la dada y calcular $T^{-1}(t^2 + 4t + 3)$. b. Hallar los valores de λ para que existan al menos dos $x \in R^3$ tal que $T(x) = t^2 - t - 1$

a. T es inversible sii[10] el determinante de la matriz dada es no nulo, y como de hacer la cuenta resulta $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, debe ser $\lambda \in R - \{0, 1\}$, de allí es inversible en particular para $\lambda = -1$ y como una funcion es inversible sii es biyectiva, la justificación está completa[11]. Para las matrices, llamemos $A = [T]_{EB}$

$[T^{-1}]_{E'E} = [[T]_{EE'}]^{-1} = [C_{BE'} A]^{-1} = A^{-1} C_{E'B}$.[12]

Por último, como t2 +4 t + 3 es $T(E_3)$ [13], resulta que T–1 $(t^2 + 4t + 3) = E_3$.

b. Para que se cumpla lo pedido es *necesario* que T no sea inversible, esto es *necesito* que $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, lo que no *alcanza* [14], pue debe estar t2 –t–1 en la imagen de T, lo que no sucede para $\lambda = 0$, y sí para $\lambda = 1$ que es el único valor que satisface lo pedido.

---

[10] ¡Justificar!

[11] Ignoro porqué en este punto para justificar en general reiniciaron como si lo anterior lo hubiese hecho otro.

[12] ¡¡¡Encontré 15 versiones diferentes a estas dos igualdades en 30 exámenes!!! Más grave, muchos, tal vez sin leer el enunciado, se empeñaron en efectuar todos los cálculos, correctos o incorrectos.

[13] Mire fijo la matriz!

[14] Otra vez, en general hallé que no creyeron importante verificar esto, como si la suficiencia fuese cuestión de hadas malignas.